Ejercicios de Logica de Primer Orden

Profesora: María Luisa Bonet Carbonell

1. Sea $\Gamma = \{F_1, F_2, ..., F_k\}$ Demostrar que los 3 enunciados siguientes son equivalentes.
   (a) $\Gamma \vdash A$
   (b) $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to A$ es una tautología
   (c) $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \land \neg A$ es una contradicción

2. Es el siguiente conjunto satisfactible?
$$M = \{P_1 \lor P_2, \neg P_2 \lor \neg P_3, P_3 \lor P_4, \neg P_4 \lor \neg P_5, ...\}$$
   Si es así, buscar una interpretación que lo satisfaga.

3. Demostrar o dar contraejemplo:
   (a) Si $F \to G$ y F son tautologías, entonces G es tautología
   (b) Si $F \to G$ y F son satisfactibles, entonces G es satisfactible
   (c) Si $F \to G$ es una tautología y F es satisfactible, entonces G es satisfactible

4. Demostrar o dar un contraejemplo:
   (a) Si $\vdash A$ entonces $\Gamma \vdash A$ para todo Γ
   (b) Si Γ es insatisfactible, entonces $\Gamma \vdash A$ para toda A
   (c) Si $\Gamma \vdash A$, entonces existe una interpretacin que satisface a Γ y a A

5. Sea $F \to G$ una tautología donde F y G no contienen variables en común. Demostrar que o bien F insatisfactible o G es una tautología (o ambas cosas).
   [Mostrar que la hipótesis de que F y G no contienen variables en común es necesaria].

6. Sea $F \equiv G$. Demostrar que si F' y G' son fórmulas obtenidas a partir de F y G, pero cambiando las conjunciones por disyunciones, y las disyunciones por conjunciones, entonces $F' \equiv G'$.

7. Buscar FNC y FND equivalente de
$$(\neg A \rightarrow B) \vee ((A \wedge \neg C) \leftrightarrow B)$$

8. La tabla de verdad de una frmula, nos da la FND. Por que? Tambin nos da la FNC?

9. Sea:
$$F = \{p \vee \neg q \vee r, q \vee r, \neg p \vee r, q \vee \neg r, \neg r\}$$
Determinar $Res^n(F)$ para $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$.

10. Demostrar que para todo conjunto finito de cláusulas F, existe $k \geq 0$ tal que
$$Res^k(F) = Res^{k+1}(F) = ... = Res^*(F)$$

11. Demostrar usando resolución:
$$p \vee q \vee r, \neg p \vee q, \neg q \vee r, p \vee \neg r \vdash p \wedge q \wedge r$$

12. Demostrar usando resolución:
$$\vdash (\neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg q \wedge \neg s) \vee (r \wedge s) \vee q$$

13. Una clusula es positiva (negativa) si solo contiene literales positivos (negativos). Demostrar que una FNC que no contiene una clusula positiva (negativa) es satisfactible.

14. Dada la formula $F = (Q(x) \vee (\exists x \forall y (P(f(x), z) \wedge Q(a)) \vee \forall x R(x, z, g(x))))$, decir que subformulas son cerradas, dar el árbol de la fórmula, y determinar que ocurrencia de cada variable es libre o ligada.

15. Demostrar que la siguiente restricción de resolución es completa para la clase de formulas Horn: derivar el resolvente de dos clausulas sii una de las dos clausulas es unitaria (tiene solo un literal).

Pista: mostrar que el proceso de marcaje para formulas de Horn del algoritmo para ver si son satisfactibles puede ser simulado en cierta forma por aplicaciones de la regla de resolución con clausulas unitarias.

Nota: la restricción de que una de las dos clausulas sea unitaria hace que el resolvente sea más pequeño que la otra clausula. Ver que se pueden encontrar refutaciones de forma eficiente para fórmulas Horn.

16. Sear $F = \exists x \exists y \exists z (P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(x,z) \wedge \neg P(z,x))$. Cuales de los siguientes modelos satisfacen a F?

    - $U = N$, $I(P) = \{(m,n) | m,n \in N, m < n\}$
    - $U = N$, $I(P) = \{(m, m+1) | m \in N\}$
    - $U = P(N)$, $I(P) = \{(A,B) | A,B \in N, A \subset B\}$

17. Sea F una formula, y sean $x_1, \ldots, x_n$ las variables que ocurren libres en F. Demostrar:

    - F es valida sii $\forall x_1 \cdots \forall x_n F$ es valida.
    - F es satisfactible sii $\exists x_1 \cdots \exists x_n F$ es satisfactible.

18. Demostrar las siguientes equivalencias:

    - $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$.
    - $\forall x F \vee G \equiv \forall x (F \vee G)$, siempre que x no ocurra libre en G.
    - $\exists x F \wedge G \equiv \exists x (F \wedge G)$, siempre que x no ocurra libre en G.
    - $\forall x F \wedge \forall x G \equiv \forall x (F \wedge G)$.
    - $\exists x F \vee \exists x G \equiv \exists x (F \vee G)$.

19. Demostrar lo siguiente usando contraejemplos:

    - $\forall x F \vee \forall x G \not\equiv \forall x (F \vee G)$.
    - $\exists x F \wedge \exists x G \not\equiv \exists x (F \wedge G)$.

20. Demostrar que $\exists x P(x) \rightarrow P(y))$ es equivalente a $\forall x (P(x) \rightarrow P(y))$.

21. Demostrar que $\forall x \exists y P(x,y)$ es consecuencia lógica de $\exists u \forall v P(v,u)$, pero no al revés.

22. Sea $M = (U, I)$ un modelo, y t un término en el que la variable x no aparece. Entonces, $M(t) = M_{[x/u]}(t)$ para todo $u \in U$.

23. Sea $M = (U, I)$ un modelo, y F una fórmula en el que la variable x no aparece libre. Entonces, $M(F) = M_{[x/u]}(F)$ para todo $u \in U$.

24. Sea $M = (U, I)$ un modelo, y F una fórmula en el que la variable x no aparece libre. Entonces, $M(F) = M_{[x/u]}(F)$ para todo $u \in U$.

25. Demostrar $\forall x F \equiv \forall y(F\{y/x\})$ donde y no aparece libre en F, y $F\{y/x\}$ es libre. Ver que lo mismo es cierto para el existencial.

26. Demostrar para la lógica de primer orden el teorema del reemplazamiento: Sean F y G dos formulas tales que $F \equiv G$. Supongamos que F es una subformula de la fórmula H. Sea H' la fórmula que consiste en sustituir una ocurrencia de F por G en H. Entonces $H \equiv H'$.

27. Encontrar la forma normal de Skolem conjuntiva de:

$$\forall z \exists y (P(x, g(y), z) \vee \neg \forall x Q(x)) \wedge \neg \forall z \exists x \neg R(f(x, z), z).$$

28. Modifica el algoritmo para encontrar la forma normal de Skolem de tal manera que se inviertan los roles del $\forall$ y del $\exists$. De esta manera a partir de una fórmula F se obtiene una fórmula F' sin cuantificadores universales. Demostrar que F es válida si y solo si F' es válida.

29. Muestra que el proceso de Skolemización no preserva la equivalencia dando una fórmula F y un modelo M tal que M satisface a F, pero no a la Skolemización de F.

30. Dada la fórmula $\forall x \forall y \forall z P(x, f(y), g(z, x))$, definir dos modelos de Herbrand asociados a la fórmula, uno que la satisfaga, y otro que la falsifique.

31. Dada una fórmula F:

$$F = \forall x \forall y ((\neg Px \vee \neg Pf(a) \vee Qy) \wedge Py \wedge (\neg Pg(a, x) \vee \neg Qa))$$

encontrar el universo de Herbrand para F, y la expansión de Herbrand para F. Encontrar un subconjunto finito de la expansión de F que sea ya insatisfactible en lógica proposicional, y verificar su insatisfactibilidad por resolución.

32. Consideremos el siguiente conjunto de claúsulas:

$$\{\neg P(f(y,g(z)),h(b)), P(f(h(w),g(a)),v) \vee P(f(h(b),g(z)),y)\}$$

Demostrad que a partir de él podemos obtener la claúsula vacia de dos formas diferentes. Una usando renombramiento, resolucion y factorización, y la otra, usando la regla del resolvente. En ambos casos especificar claramente los conjuntos de igualdades a unificar y las sustituciones correspondientes.

33. En lógica de primer orden con igualdad, formalizar el enunciado: "Existen cono mínimo n elementos diferentes". Además definir un conjunto de fórmulas que tenga la siguiente propiedad: si un modelo satisface a todas las fórmulas del conjunto, entonces el modelo es infinito (tiene un dominio infinito). Demostrar esto último.

34. Programar en Prolog el algorítmo de ordenación mergesort.